# Важно уметь выполнять

***В 2019 году в централизованном тестировании по математике приняли участие 40 794 абитуриента. Тестирование прошли в 1,61 раза больше юношей, чем девушек.***
***Максимально возможный балл (100) имеет 101 участник тестирования, из которых 82 — выпускники учреждений общего среднего образования текущего года, 19 — выпускники прошлых лет. Девушек среди них — 32, юношей — 69.***
***Проанализируем результаты выполнения теста по разделам.***

## Числа и вычисления

В тест были включены следующие элементы содержания: иррациональные числа, сравнение действительных чисел, изображение чисел на координатной прямой, радиан, наименьшее общее кратное.

Самый высокий результат (65,82%) абитуриенты показали при определении верного утверждения в задании А3 на сравнение чисел. Для успешного выполнения этого задания тестируемым необходимо было применить правила сравнения десятичных и обыкновенных дробей, а также правило возведения степени в степень. Пятая часть испытуемых неверно применила свойство $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$ и выбрала, как правильный, ответ $6^{\frac{1}{5}} = 6^{-5}$.

В задании А1 на определение точки, координата которой может соответствовать, например, числу $\frac{7\pi}{6}$, каждый пятый участник тестирования ошибочно полагал, что число $\pi \approx 1$. Только 56,81% абитуриентов знали, что $\pi \approx 3{,}14$, и правильно указали точку на координатной прямой.

Более 60% выпускников средних школ текущего года уверенно применили формулу перевода радианной меры угла в градусную в задании А4, однако около 16% участников тестирования, находя градусную меру угла, смежного с данным углом, не знали свойства смежных углов.

Наиболее низкий (31,61%) результат выполнения — в задании на применение алгоритма нахождения наименьшего общего кратного двух чисел в задании А15. При поиске всех натуральных чисел $n$, для которых выполняется равенство НОК($n$, $a$) = $a$, третья часть тестируемых определила, что равенство возможно, только если число $n = a$; почти каждый пятый экзаменуемый считал, что таких чисел существует всего два: $n = 1$ и $n = a$; около 13% абитуриентов не учли только один случай $n = 1$. Определение наименьшего общего кратного (НОК) двух чисел и алгоритм отыскания НОК нескольких чисел изучается в 5 классе. Последние годы задание на нахождение НОК чисел всегда присутствует в тесте, однако посильным остается для трети испытуемых. Отметим, что аналогичные задания предлагались на РТ и дистанционном репетиционном тестировании.

Более половины участников ЦТ на достаточном уровне имеют представление о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел, владеют навыками счета, умеют применять свойства, правила и формулы для вычислений.

## Выражения и их преобразования

В тест были включены следующие элементы содержания: многочлен, разложение многочлена на множители, выражения с переменной, свойства степени с целым показателем.

Анализ статистических данных выполнения задания А5 на разложение многочлена на множители показывает, что 46% выпускников средних школ текущего года владеют способом вынесения общего множителя за скобки. Причиной ошибок, допущенных третьей частью экзаменуемых, является неумение определять многочлен, который останется в скобках после вынесения общего множителя, а также приводить подобные члены. Около 15% испытуемых допустили ошибку при раскрытии скобок, так как не учли, что перед скобками стоит множитель, равный –1, и не догадались проверить правильность своих преобразований умножением полученных множителей. Каждый десятый тестируемый не знал, что разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения двух или более многочленов, каждый из которых содержит хотя бы одну переменную.

Ежегодно экзаменуемым предлагаются задания на нахождение значения числового выражения с применением различных формул, свойств.

| Задание | Выполнение, % |
|---|---|
| **А5. (ЦТ–2017)** Значение выражения $8\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{192}$ равно:<br>1) $16\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{195}$; 3) $\frac{65\sqrt{195}}{8}$; 4) $\frac{6\sqrt{3}}{8}$; 5) $9\sqrt{3}$ | 49,31 |
| **А6. (ЦТ–2018)** Вычислите $8^{1+\log_8 6}$.<br>1) 6; 2) 14; 3) 24; 4) 48; 5) 56 | 73,38 |
| **В1. (ЦТ–2019)** Для начала каждого из предложений А–В подберите его окончание 1–5 так, чтобы получилось верное утверждение.<br>Начало предложения: **А)** Значение выражения $2^{-8} : 2^0$ равно … **Б)** Значение выражения $(-2)^{-11} \cdot 8$ равно … **В)** Значение выражения $20^4 : (-5)^4$ равно …<br>Окончание предложения: **1)** 256. **2)** –256. **3)** $-\frac{1}{256}$. **4)** $\frac{1}{256}$. **5)** 32. | 34,65 |

| | |
|---|---|
| *Ответ запишите в виде сочетания букв и цифр, соблюдая алфавитную последовательность букв левого столбца. Помните, что некоторые данные правого столбца могут использоваться несколько раз или не использоваться вообще. Например:* **А1Б1В4** | |

Особенность задания В1 текущего года заключалась в форме записи ответа (сочетание букв и цифр) и необходимости нахождения значения трех выражений вместо одного. Соответственно, для решения данного задания следовало применить большее количество свойств. Если в задании А5 ЦТ–2017 контролировалось умение выполнять действия с квадратными корнями, в задании А6 ЦТ–2018 — применять основное логарифмическое тождество, то в задании В1 ЦТ–2019 проверялось знание свойств деления и умножения степеней с одинаковыми основаниями, а также свойство возведения в степень частного. Значения выражений в пунктах А и Б задания В1 вычислили более 70% выпускников 2019 года. Однако треть абитуриентов в пункте В ошибочно нашла значение выражения $20^4 : (-5)^4$, получив ответ – 256 вместо 256. Они не учли, что при возведении отрицательного числа в степень с четным показателем получается положительное число.

Результат выполнения задания А14 на нахождение условия, которому должен удовлетворять периметр треугольной клумбы, выше у выпускников гимназий и лицеев текущего года (на 17,77 процентных пункта), чем у выпускников средних школ 2019 года. Четверть тестируемых пренебрегли формой клумбы (неравенство треугольника), из-за чего неверно определили длину ее третьей стороны. В этом задании, также как и в заданиях на определение номера верного утверждения о температуре воздуха в городах Беларуси и скорости движения катера на ЦТ–2018, достаточно было знать, что утверждение «число $y$ не меньше числа $b$» записывается в виде $y \geq b$. Нахождение связи неизвестных величин с известными было посильным лишь для третьей части участников тестирования.

При выполнении заданий по разделу «Выражения и их преобразования» умения применять тождественные преобразования выражений, раскладывать многочлен на множители, применять свойства степеней, выполнять проверку своих вычислений, находить связи между величинами продемонстрировали более 35% экзаменуемых.

## Уравнения и неравенства

В тест были включены следующие элементы содержания: системы линейных неравенств с одной переменной, уравнение окружности, квадратное уравнение, теорема Виета, уравнение, корень уравнения, квадратное неравенство, тригонометрическое уравнение, текстовая задача (на составление системы уравнений с двумя переменными), иррациональное уравнение, рациональное неравенство (метод интервалов), показательное уравнение, логарифмическое уравнение, текстовая задача на работу.

Данный раздел представлен наибольшим количеством заданий, которые достаточно полно отражают многообразие видов уравнений и неравенств, а также методов их решений, изучаемых на II и III ступенях общего среднего образования.

Для успешного выполнения задания А2 участникам тестирования достаточно было знать, что две системы неравенств называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй системы, и наоборот — каждое решение второй системы является решением первой, то есть если они имеют одни и те же решения. Определили номер системы неравенств, которая равносильна данной, около 75% абитуриентов.

Проверка владения теоремой Виета при решении квадратного уравнения показала, что более 70% выпускников гимназий и лицеев текущего года умеют применять ее при нахождении коэффициентов приведенного квадратного уравнения в задании А10. Однако более 13% испытуемых не знали, что сумма корней приведенного квадратного уравнения равна среднему коэффициенту, взятому с противоположным знаком, и такая же часть тестируемых ошибочно считала, что сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену.

Второй год подряд предлагалось задание, при выполнении которого необходимо было из перечня однородных объектов выбрать один, обладающий определенным свойством.

| Задание | Выполнение, % |
|---|---|
| **А15. (ЦТ–2018)** Укажите номер уравнения, которое имеет более одного корня.<br>**1)** $5x + 2 = 2$; **2)** $2(9 - 2x) = -4x$; **3)** $\frac{2}{5}x + 7 = x$; **4)** $\frac{5x+2}{3} = 4$; **5)** $5x + 2 = \frac{15x+6}{3}$.<br>1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5 | 55,92 |
| **А13. (ЦТ–2019)** Укажите номера уравнений, которые не имеют действительных корней.<br>**1)** $x^2 = 49$; **2)** $\frac{1}{x^2 - 49} = 0$; **3)** $x^2 + 49 = 0$; **4)** $x^2 + 49x = 0$; **5)** $x^2 + x - 49 = 0$.<br>1) 1, 2; 2) 2, 3; 3) 1, 5; 4) 3, 4; 5) 4, 5 | 52,22 |

По данным таблицы линейные уравнения на 3,7 процентных пункта решаются лучше, чем квадратные. Более 52% абитуриентов умеют решать квадратные уравнения, различают неполные квадратные уравнения и знают условие равенства дроби нулю. Около 45% испытуемых затрудняются в определении количества корней уравнения.

Задание А6, в котором необходимо было указать номер верного утверждения для уравнения окружности $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 14$, успешно выполнили более 34% тестируемых. Почти четверть участников тестирования неверно определили точку $O(-3; 4)$ центром окружности, из-за чего не смогли проверить, проходит ли прямая $y = 2x - 10$ через центр этой окружности. Около 19% абитуриентов не учли, что в уравнении окружности вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ в правой части стоит радиус окружности в квадрате, а не ее диаметр или радиус. Более 10% тестируемых не знали, что если точка лежит на окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой окружности. Допущенные экзаменуемыми ошибки указывают на то, что навык определения свойств окружности по ее уравнению ими не отработан.

Ежегодно в тестах ЦТ по математике проверяется умение решать простейшие тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к ним, методами, не выходящими за рамки требований Программы вступительных испытаний. На ЦТ–2019 в задании А17 было предложено тригонометрическое уравнение $\cos(3\pi x) \cdot \cos\left(3\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, алгоритм решения которого основывается на применении формулы приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ и формулы двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, а также на умении решать простейшее тригонометрическое уравнение вида $\sin x = a$. С ним справились 33,79% выпускников средних школ текущего года. При выполнении задания многие абитуриенты неверно применили формулы приведения и двойного угла, ошиблись в преобразованиях для получения формулы решений уравнения. Пятая часть участников тестирования вместо суммы наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней уравнения нашла либо только наибольший отрицательный корень, либо только наименьший положительный корень. Поэтому решение любого задания теста необходимо начинать с изучения его условия.

На ЦТ–2019 в части В теста предлагались следующие уравнения и неравенства:

| Задание |
|---|
| **В4.** Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{x^2 - 9x + 8} - \sqrt{23 - 11x} = 0$. |
| **В6.** Найдите произведение наибольшего целого решения на количество всех целых решений неравенства $\frac{x^2 - x - 20}{(x^2 + 4x)^2} \leq 0$. |
| **В9.** Найдите увеличенную в 3 раза сумму квадратов корней уравнения $\sqrt[5]{5^{2x^2+3x-5}} - (\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + 1)^{2x} = 0$. |
| **В10.** Найдите сумму всех целых чисел из области определения функции $y = \frac{\sqrt[4]{56 + 9x - 2x^2}}{\log_{\sqrt[3]{7}} x - 3}$. |

Правильно применили способ замены исходного уравнения его следствием в задании В4 27,64% абитуриентов, методом интервалов (задание В6) владеют 21,94% тестируемых, знание свойств показательной функции (задание В9) продемонстрировали 10,30% участников тестирования. Каждый пятый выпускник гимназий и лицеев 2019 года справился с решением квадратного неравенства и логарифмического уравнения в задании В10. Однако многие абитуриенты при решении логарифмического уравнения не учли, что выражение $\log_a x$, где $x$ — переменная, $a$ — постоянная, $a > 0$, $a \neq 1$, имеет смысл при любом значении $x > 0$. Более трети участников тестирования было трудно определить значения переменной, при которых одновременно обращается квадратное неравенство в верное числовое неравенство и логарифмическое уравнение в верное числовое равенство.

На основе анализа ответов выделим причины типичных ошибок, допущенных абитуриентами при решении уравнений и неравенств:

— каждый третий испытуемый, реализуя метод интервалов, неверно находит область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции;

— половина экзаменуемых не умеет обе части показательного уравнения представить в виде степени с одним и тем же основанием, а затем записать равенство показателей этих степеней;

— четверть абитуриентов при упрощении правой части показательного уравнения с применением тождества $\sqrt{a^2} = |a|$ и определения модуля числа чаще всего ошибается, считая верным равенство $\sqrt{a^2} = a$;

— каждый пятый участник тестирования не выполняет проверку корней, полученных при решении уравнения-следствия.

Предложенные уравнения и неравенства проверяли не только владение стандартным алгоритмом выполнения, но и понимание математической ситуации, умение провести ее анализ и выбрать рациональный метод решения.

Текстовые задачи В3 и В11 решались составлением системы уравнений с двумя переменными. Труднее для абитуриентов оказалась текстовая задача В11 на работу. С ней справились менее 10% тестируемых. Задачу В3 о количестве жидкости в двух сосудах решили более 35% тестируемых. В целом причинами неверных ответов в задачах могли быть:

— неумение находить процент от числа;

— неумение находить связи между известными и неизвестными величинами;

— незнание формулы для нахождения работы через про-

# проверку полученного результата

изводительность труда и время, затраченное на выполнение этой работы;

— неверное применение способов решения систем уравнений с двумя переменными (способы сложения и подстановки);

— непонимание того, что в одном сосуде не может быть больше жидкости, чем в двух сосудах вместе;

— неумение записывать отдельные условия задач с помощью знаковых (символьных) моделей;

— игнорирование отдельных данных условия задачи, например, в задании В11, «рабочие различной квалификации».

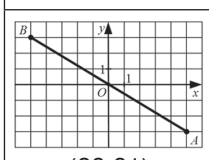
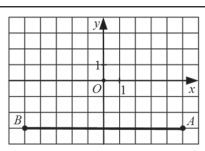
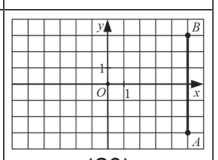
В текстовых, практико-ориентированных задачах часто можно провести проверку полученного ответа, анализируя его содержание. Например, если спрашивается, сколько литров или сколько минут, то результат точно не может быть числом отрицательным. Однако среди ответов, характеризующих количество жидкости (в литрах), время работы (в минутах), есть отрицательные числа и выражения, число 0, многозначные натуральные числа, например, 1063, 1139, 27 075, 126 000 и др.

Успешнее всего с заданиями данного раздела справились те абитуриенты, которые умеют: отбирать из базы имеющихся знаний и умений те, которые необходимы для достижения результата; систематизировать информацию и на основе ее строить свои утверждения; выполнять действия по алгоритмам и правилам; комбинировать ранее известные способы решения для получения нового способа.

## Координаты и функции

В тест были включены следующие элементы содержания: график (графики реальных процессов), геометрическая прогрессия, расстояние между точками на координатной плоскости, четность и нечетность функции, периодичность функции.

Задание А7 на нахождение расстояния между двумя точками на координатной плоскости выполнили 42,38% выпускников текущего года. Основной причиной ошибок явилось неумение строить на координатной плоскости точку, симметричную данной относительно начала координат. В таблице представлены варианты расположения точек *A* и *B*, исходя из предположений абитуриентов.

| Точка *B* симметрична данной точке *A* относительно начала координат (% абитуриентов) | Точка *B* симметрична данной точке *A* относительно оси ординат *0y* (% абитуриентов) | Точка *B* симметрична данной точке *A* относительно оси абсцисс *0x* (% абитуриентов) |
|---|---|---|
|  |  |  |
| (38,61) | (30) | (20) |

Как видно из таблицы, около 39 % тестируемых умеют определять точку, симметричную данной относительно начала координат. Для третьей же части участников тестирования симметрия относительно начала координат подменяется симметрией относительно оси ординат *Oy*, а для пятой части испытуемых — симметрией относительно оси абсцисс *Ox*. Умение определять положение точки на плоскости является важным и при изучении свойств графиков.

Задания с использованием графиков реальных процессов стали неотъемлемой частью теста. На ЦТ–2019 было предложено задание А9 на движение по течению и против течения реки. Для его решения следовало использовать данные графика. Более 40% экзаменуемых верно нашли скорость течения реки, правильно определив по графику скорость движения катера по течению реки и скорость движения моторной лодки против течения реки, приняв во внимание тот факт, что при движении судна по течению реки течение помогает ему плыть, следовательно, его скорость равна сумме собственной скорости и скорости течения реки. А при движении против течения реки — мешает, и скорость равна разности собственной скорости и скорости течения реки. Более 53% испытуемых не смогли получить правильный ответ из-за вычислительных ошибок.

Высокий процент выполнения (52,51% выпускников 2019 года) имеет задание А11 на проверку умения применять формулу *n*-го члена геометрической прогрессии для нахождения ее членов. Основная причина ошибок, допускаемых абитуриентами в этом задании, состоит в незнании формулы *n*-го члена геометрической прогрессии, неверном ее применении, а также в незавершенности вычислительных операций.

Понимание свойств нечетной, периодической функции и их графического представления контролировалось с помощью задания В7. На трех этапах РТ и дистанционном репетиционном тестировании предлагались задания на проверку владения участниками тестирования понятиями нечетной функции, периодической функции, знания особенностей графиков этих функций. Выполнение таких заданий (в зависимости от содержания с ними справлялись от 13,13 до 26,22% участников РТ) позволяет выявить не формальное усвоение определений, а умение использовать их для решения поставленной задачи. Успешнее всего применили свойство графика нечетной, периодической функции в измененных условиях выпускники текущего года. К типичным ошибкам в данном задании можно отнести:

— незнание того, что по определению нечетной функции *f* точки $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ ее графика с противоположными абсциссами *x* и *–x* имеют ординатами противоположные числа $f(x)$ и $-f(x)$, то есть эти точки симметричны относительно начала координат;

— незнание того, что при изображении графика нечетной функции *f* достаточно сначала построить часть графика, состоящую из всех точек с неотрицательными абсциссами, а затем отобразить построенную часть графика симметрично относительно начала координат;

— незнание того, что точка пересечения прямой $y = a$ с графиком функции *f* имеет ординату, равную *a*;

— незнание определения периодической функции *f* с периодом $T \neq 0$;

— неумение находить для периодической функции *f* значения $f(x)$, используя верные для нее равенства $f(x + T) = f(x)$, $f(x - T) = f(x)$.

Отметим, что задания по разделу «Координаты и функции» имеют практическую направленность, а также являются основой для изучения отдельных тем в высшей математике. Владение свойствами функций позволяет многие задачи решать рациональными способами.

## Геометрические фигуры и их свойства

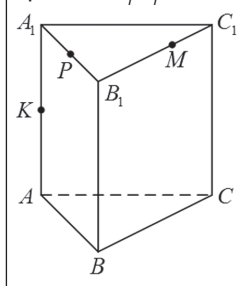
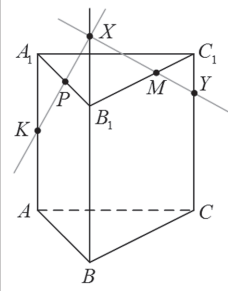
В тест были включены следующие элементы содержания: взаимное расположение прямой и окружности, касательная к окружности, соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, площадь сферы, сечение призмы, аксиомы стереометрии, прямая, перпендикулярная плоскости, площадь трапеции, пирамида, площадь боковой поверхности пирамиды, объем конуса.

Как уже не раз отмечалось, многие абитуриенты при решении стереометрических задач сталкиваются с неумением изобразить пространственную фигуру так, чтобы ее изображение давало верное представление о ее форме и являлось удобным для изучения ее свойств. Именно это не позволило более чем 95% тестируемых решить задачу В12 на нахождение объема тела вращения, состоящего из нескольких конусов.

В этом году в тест было включено новое задание В2 множественного выбора, направленное на проверку знания аксиом стереометрии, определения прямой, перпендикулярной плоскости, теоремы о параллельности прямых, перпендикулярных плоскости. К решению задания В2 приступали около 99% всех экзаменуемых, но справились с ним 37,65% абитуриентов. Сложность задания В2 для многих тестируемых заключалась в том, что им требовалось выбрать три верных утверждения из шести, а не два и не четыре, как посчитали многие.

Знание соотношений между величинами пространственных фигур позволило 46,23% участников тестирования вычислить площадь сферы в задании А16. Практически каждый пятый испытуемый сделал ошибку, применив для вычисления формулу площади круга ($S_{круга} = \pi R^2$) вместо формулы площади сферы ($S_{сферы} = 4\pi R^2$). Умение контролировать полученный результат является важным при выполнении геометрических задач на прямое использование формул.

Ежегодно участникам тестирования предлагаются задачи на умение выполнять построение сечения многогранника некоторой плоскостью.

| Задание | Рисунок (построение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью одной из граней треугольной призмы, указанной в условии) | Выполнение, % |
|---|---|---|
| **А18 (ЦТ–2019)** $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны $24\sqrt{3}$. Точки *P* и *K* — середины ребер $A_1B_1$ и $AA_1$ соответственно, $M \in B_1C_1$, $C_1M : C_1B_1 = 1 : 3$. Найдите длину отрезка, по которому плоскость, проходящая через точки *M, P, K,* пересекает грань $BB_1C_1C$.  1) $8\sqrt{3}$; 2) $20\sqrt{3}$; 3) $18\sqrt{3}$; 4) $10\sqrt{3}$; 5) $12\sqrt{3}$ |  Найти длину отрезка *MY* | 18,87 |

В задании А18 не было необходимости полностью строить сечение плоскостью, проходящей через три заданные точки. Достаточно построить линию пересечения секущей плоскости с плоскостью одной из граней треугольной призмы, указанной в условии, а затем вычислить длину полученного отрезка, рассмотрев пару равных треугольников, пару подобных треугольников и применив теорему Пифагора. Почти пятая часть экзаменуемых смогла продемонстрировать данное умение. Однако около 25% испытуемых ошибочно нашли длину отрезка как третью часть от длины стороны треугольной призмы.

Несмотря на то, что пробелы в геометрической подготовке абитуриентов остаются, более 60% тестируемых смогли правильно найти градусную меру угла, образованного двумя касательными, проведенными к окружности из одной точки, и применить свойство касательной к окружности в задании А8. Однако 20% участников тестирования затруднялись в определении алгоритма нахождения величины угла и, вероятно помня о том, что касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания, нашли требуемую величину угла как разность 90° и величины угла, данного в условии. Третья часть экзаменуемых успешно применила определение котангенса острого угла прямоугольного треугольника для вычисления одного из его катетов в задании А12, более 10% участников тестирования смогли найти площадь трапеции в задании В5 и менее 10% — площадь боковой поверхности пирамиды в задании В8.

К трудностям, с которыми сталкиваются абитуриенты при решении геометрических заданий, можно отнести: выполнение наглядного рисунка по условию задачи; поиск дополнительной информации о зависимостях между данными и искомыми величинами на геометрических рисунках; отбор из изученных аксиом и теорем тех, которые необходимы для решения; комбинирование свойств фигур и теорем из планиметрии и стереометрии.

Как уже отмечалось, наряду с владением различными способами решения задач, важно уметь выполнять проверку полученного результата, так как это является составной частью многогранного процесса, связанного с поиском путей решения задачи. Только систематическое решение математических задач может повысить качество подготовки участников тестирования.

**Материал предоставлен Республиканским институтом контроля знаний.**
**Фото Олега ИГНАТОВИЧА.**